

Varianta 36

Subiectul I

- a) $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.
- b) $a = 0, b = -2$.
- c) Punctul de intersecție este $P\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$.
- d) $1 + 3 - 4 = 0$, adevărat, deci A se găsește pe dreapta dată.
- e) partea reală a numărului complex este $\frac{1}{5}$.
- f) $\cos 30^\circ - \sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Subiectul II

1.

- a) $x \in (-3, 3)$.
- b) $p = \frac{9}{17}$.
- c) Din algoritmul de împărțire al polinoamelor obținem câtul $C(X) = X^2 - 2X + 2$.
- d) Punctul $A \in G_f \Leftrightarrow f(-1) = 5$.
- e) $S = \{-3, -1, 3\}$.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2 + 2x$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 16$.
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3 + 1} = 1$.
- d) $S = \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$.
- e) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{79}{12}$.

Subiectul III

- a) $\det A = 0$.
- b) $A^2 = O_2$.

c) $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2 \Leftrightarrow I_2 + aA + A + aA^2 = I_2 \Leftrightarrow (a+1) \cdot A = O_2 \Leftrightarrow a+1=0$ de unde $a = -1$.

d) Rezolvând sistemul obținem soluția $S = \{(0,0)\}$.

e) Din b) rezultă $A^k = O_2, \forall k \geq 2 \Rightarrow \det(I_2 + A^n) = \det I_2 = 1$.

f) Se demonstrează folosind metoda inducției matematice.

Pentru $n=1$ avem $I_2 + A = I_2 + 1 \cdot A$, adevărat.

Presupunem adevărată pentru $n=k \Rightarrow (I_2 + A)^k = I_2 + kA, k \in \mathbf{N}^*$.

Vom arăta că $(I_2 + A)^{k+1} = I_2 + (k+1)A$.

$$(I_2 + A)^{k+1} = (I_2 + A)^k \cdot (I_2 + A) = (I_2 + kA)(I_2 + A) = I_2 + A + kA + kA^2 = I_2 + (k+1)A$$

în baza inducției matematice obținem $(I_2 + A)^n = I_2 + nA, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $B = I_2 + 2A + 3A^2 + \dots + 2005A^{2004} = I_2 + 2A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$, deci $\det B = 1$.

Subiectul IV

a) $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = f(x), \forall x > 0$.

b) $f'(x) = \frac{-2}{x^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$.

c) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 + \frac{1}{x+1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = 0$ rezultă $y=0$ este asimptota orizontală la graficul

funcției f spre $+\infty$ și atunci graficul funcției nu are asimptotă oblică.

e) $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) \stackrel{a)}{=} \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} =$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}, \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1$.

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n^2 + 2n + 1} \right)^{\frac{n^2 + 2n + 1}{-1} \cdot \frac{-n^2}{n^2 + 2n + 1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2 + 2n + 1}} = \frac{1}{e}.$